NOTION DE FONCTION

Ph DEPRESLE

25 juin 2015

Table des matières

1 Fonction et courbe représentative

1.1 Notion de fonction

Définition 1. *Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$.*
- *Définir une fonction f sur $\mathcal{D}$, c'est associer à tout nombre réel x appartenant à $\mathcal{D}$ un nombre réel unique noté $(f(x)$.*
- *Le nombre réel $f(x)$ est appelé l'image de x par la fonction f.*
- *L'ensemble des nombres réels x qui ont une image par la fonction f est appelé l'ensemble de définition de la fonction f.*
- *Si $y = f(x)$ on dit que x est un antécédent de y par f.*
  Les antécédents du réel y par la fonction f sont donc les solutions de l'équation $f(x) = y$.

Notation :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Exemples :
Soit f la fonction qui à chaque nombre réel x appartenant à $[1;+\infty[$ fait correspondre le nombre réel $\sqrt{x-1}+2$.
- L'image de 2 est 3 car $f(2) = \sqrt{(2-1)}+2 = 1+2$
- L'image de 3 est $\sqrt{2}+2$ car $f(3) = \sqrt{(3-1)}+2 = \sqrt{2}+2$
- L'image de 0 n'existe pas car on ne peut calculer $\sqrt{0-1}$

1.2 Tableau de valeurs d'une fonction

Définition 2. *Un tableau de valeurs d'une fonction f est un tableau donnant la correspondance entre des nombres réels x appartenant à l' ensemble de définition de f et leurs images $f(x)$.*

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4$.
Pour x appartenant à l'intervalle $[-3;3]$ et variant de 1 en 1, on a le tableau suivant :

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3
$f(x)$	5	0	- 3	- 4	- 3	0	5

1.3 Courbe représentative d'une fonction

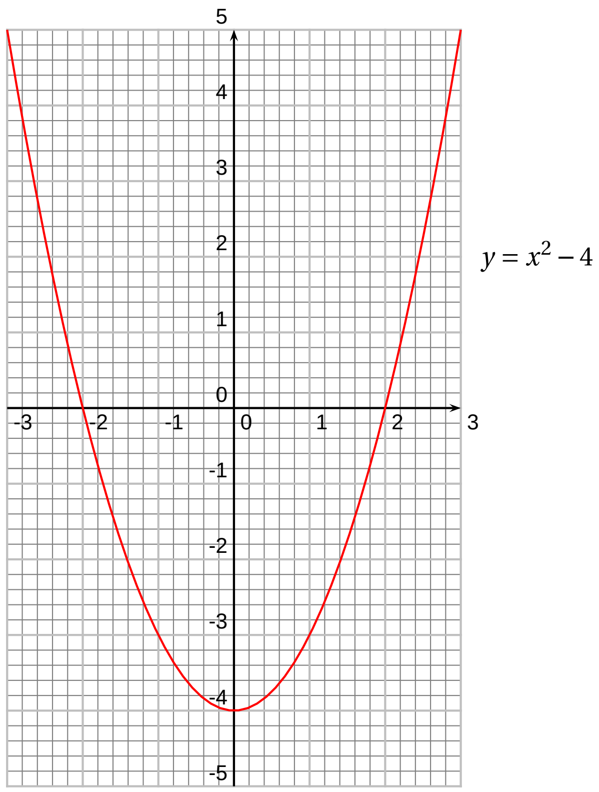
Définition 3. *Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.*
La représentation graphique ou courbe représentative de la fonction f dans le repère (O,I,J) est l'ensemble $\mathcal{C}_f$ de tous les points du plan de coordonnées $(x;f(x))$ lorsque x décrit $\mathcal{D}$.
On dit que la courbe $\mathcal{C}_f$ a pour équation $y = f(x)$ dans le repère (O,I,J)

Dire qu'un point $M(x;y)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$ signifie que :

$$x \in \mathcal{D} \text{ et } y = f(x)$$

Exemple :

En utilisant le tableau de valeurs précédent, on a :

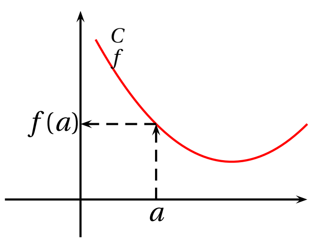


2 Lectures et résolutions graphiques

f et g désignent deux fonctions, et on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal (O, I, J).

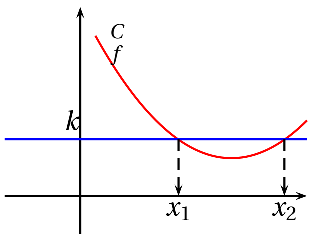
2.1 Lecture graphique d'une image

Graphiquement, l'image $f(a)$ de a par f est l'ordonnée du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ dont l'abscisse est a.



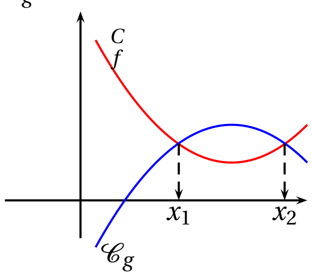
2.2 Résolution graphique d'une équation $f(x) = k$

Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = k$, où k est un nombre réel donné, sont les abscisses x des points d'intersections de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = k$.



2.3 Résolution graphique d'une équation $f(x) = g(x)$

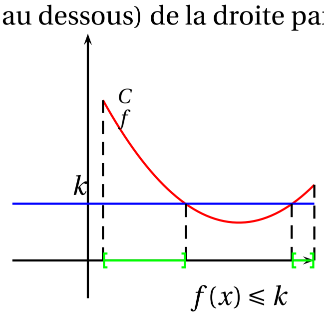
Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$, sont les abscisses x des points d'intersections des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Remarque :
Par lecture graphique, on ne peut obtenir qu'une valeur approchée des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

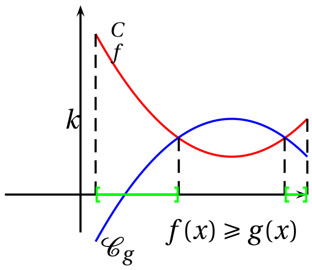
2.4 Résolution graphique d'une inéquation $f(x) > k$ ou $f(x) < k$

Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) > k$ (respectivement $f(x) < kf$, où k est un nombre réel donné, sont les abscisses x des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés strictement au-dessus (respectivement strictement au dessous) de la droite parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = k$.



2.5 Résolution graphique d'une inéquation $f(x) > g(x)$ ou $f(x) < g(x)$

Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ (respectivement $f(x) < g(x)$) sont les abscisses x des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ situés strictement au-dessus (respectivement strictement au-dessous) de la courbe $\mathscr{C}_g$.



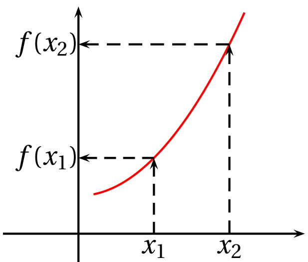
2.6 Détermination graphique du signe d'une fonction

Déterminer le signe d'une fonction f définie sur une partie de $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$, c'est déterminer le signe de $f(x)$ pour n'importe quel nombre réel x de $\mathscr{D}$.
On détermine alors les nombres réels x pour lesquels $f(x) = 0$, les nombres réels x pour lesquels $f(x) < 0$, les nombres réels x pour lesquels $f(x) > 0$, puis on résume les résultats dans un tableau de signes de f.

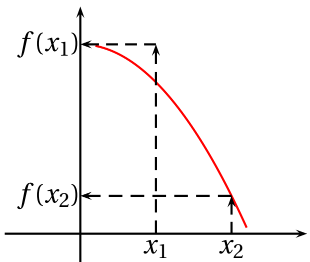
3 Comportement d'une fonction

3.1 Sens de variation d'une fonction

Définition 4. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*
Dire que la fonction f est croissante sur I (respectivement strictement croissante sur I) signifie que :
pour tous nombres réels x_1 et x_2 appartenant à I,
si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (respectivement si $x_l < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$).
Dire que la fonction f est décroissante sur I (respectivement strictement décroissante sur I) signifie que :
pour tous nombres réels x_1 et x_2 appartenant à I,
si $x_1 \leqslant x_2$ alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ (respectivement si $x_l < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$).



f croissante sur I



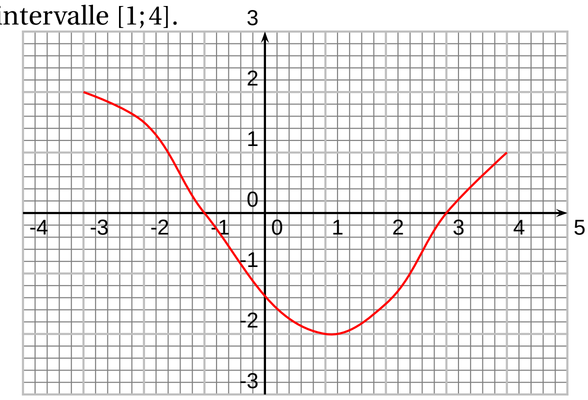
f décroissante sur I

3.2 Tableau de variation d'une fonction

Étudier les variations (ou le sens de variation) d'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ revient à déterminer les intervalles inclus dans I sur lesquels la fonction f est strictement croissante, strictement décroissante ou constante.

Exemple :
La fonction f représentée ci-contre est :
décroissante sur l'intervalle $[-3;1]$ et croissante sur l'intervalle $[1;4]$.
Son tableau de variation est le suivant :

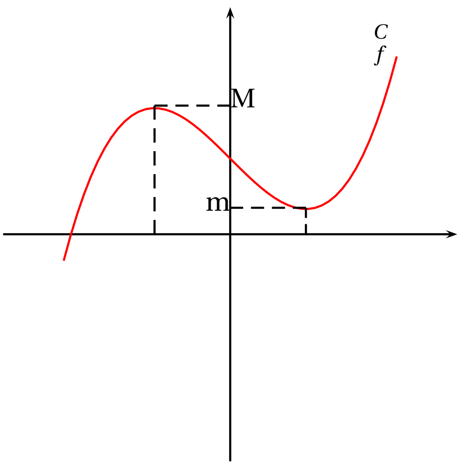
x	-3		1		4
variations de f	2	↘	- 2	↗	1



3.3 Maximum, minimum d'une fonction

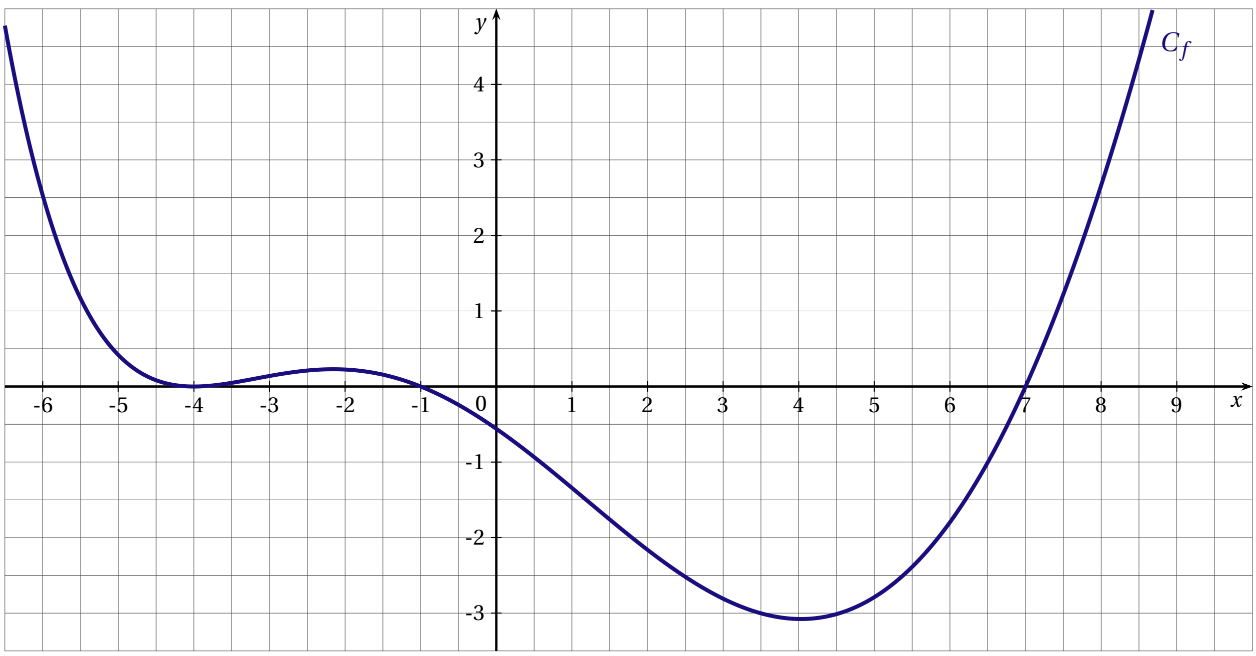
Définition 5. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a un nombre réel appartenant à I.*
Dire que la fonction f admet un maximum sur I en a signifie que
pour tout nombre réel x de I, $f(x) \leqslant f(a)$.
Le maximum de f sur I est $f(a)$.
Dire que la fonction f admet un minimum sur I en a signifie que
pour tout nombre réel x de I, $f(x) \geqslant f(a)$.
Le minimum de f sur I est $f(a)$.

Interprétation graphique



4 Les exercices

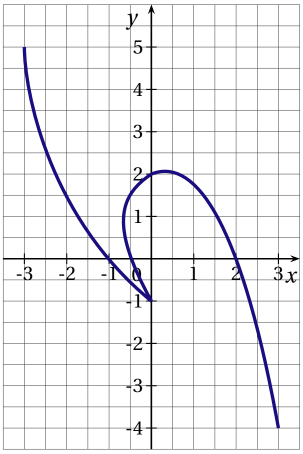
1. f et g sont deux fonctions
   (a) Traduire chacune des phrases suivantes à l'aide d'égalités :
      i. L'image de -2 par la fonction f est 3.
      ii. L'antécédent de $\sqrt{2}$ par la fonction g est -1.
   (b) i. On sait que $f(-1) = 1$. Traduire cette égalité par une phrase contenant le mot "image".
      ii. On sait que $g(1) = -2$. Traduire cette égalité par une phrase contenant le mot "antécédent".
2. La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal, est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



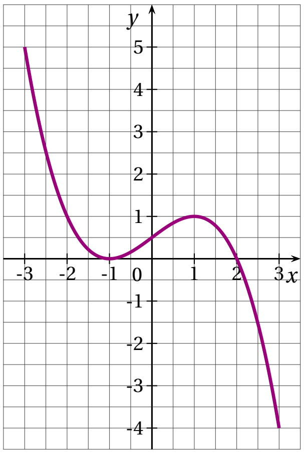
   A partir du graphique, répondre aux questions suivantes :
   (a) Quels sont les antécédents de 0 par la fonction f ?
   (b) Pour chacune des solutions de l'équation $f(x) = 2$, déterminer un intervalle d'amplitude 0,5 auquel appartient cette solution.
   (c) Donner le tableau du signe de f suivant les valeurs de x.
   (d) Établir le tableau des variations de la fonction f.
3. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-3;3]$. On sait que :
   – les images de -3 ; 0 et 3 par la fonction f sont respectivement 5 ; 0,5 et -4
   – 0 a exactement deux antécédents -1 et 2.
   (a) Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse :
      i. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.
      ii. Le point $M(-1;0)$ appartient Ã la courbe représentative de la fonction f.

iii. La courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses en deux points.

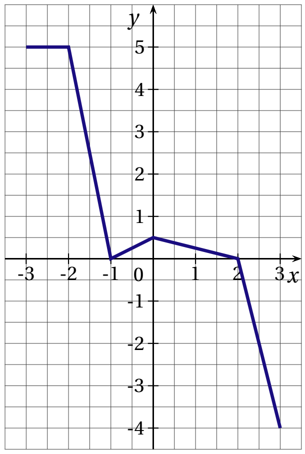
(b) Parmi les quatre courbes représentées ci-dessous, quelles sont celles qui ne peuvent pas représenter la fonction f ? (Justifier)



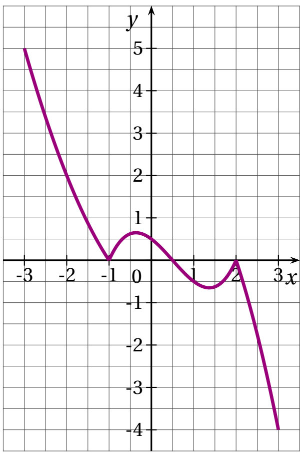
courbe $\mathscr{C}_1$



courbe $\mathscr{C}_2$



courbe $\mathscr{C}_3$



courbe $\mathscr{C}_4$

4. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-10;10]$ telle que $f(-1) = 2$. Son tableau de variations est le suivant :

x	-10		-5		1		3		5		10
$f(x)$	3	↗	5	↘	0	↘	-2	↗	0	↗	1

(a) Donner le tableau du signe de f suivant les valeurs de x.

(b) Comparer $f(-1)$ et $f\left(-\dfrac{2}{3}\right)$

(c) Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 2$.

5. On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-7;10]$ telle que $f(0) = 2$.
Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	-7		-3		2		3		5		10
$f(x)$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

(a) Donner le tableau du signe de f suivant les valeurs de x.

(b) Comparer $f\left(-\frac{5}{3}\right)$ et $f\left(-\frac{3}{5}\right)$

(c) Peut-on comparer les images de -4 et de 8 ?

(d) a et b sont deux réels de l'intervalle $[-3;3]$, tels que $a < b$. Comparer $f(a)$ et $f(b)$.

(e) Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 2$.

6. **QCM**

Questions	**Réponses**
1. Si $f(2) = 3$ alors	☐ l'image de 3 est 2 ☐ l'antécédent de 2 est 3 ☐ l'image de 2 est 3
2. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors	☐ si $a < b$ on a $f(a) < f(b)$ ☐ si $a < b$ on a $f(a) > f(b)$ ☐ si $a < b$ on a $f(b) > f(a)$
3. L'ensemble de solution de l'inéquation $x^2 - 16 < 0$ est	☐ $]-\infty;-4] \cup [4;+\infty[$ ☐ $[-4;4]$ ☐ $]-4,4[$
4. Le tableau de variations d'une fonction f	☐ n'est pas unique ☐ est unique ☐ cela dépend
5. A un tableau de variations correspond	☐ une courbe unique ☐ aucune courbe ☐ une infinité

5 Les exercices corrigés

1. (a) f et g sont deux fonctions.

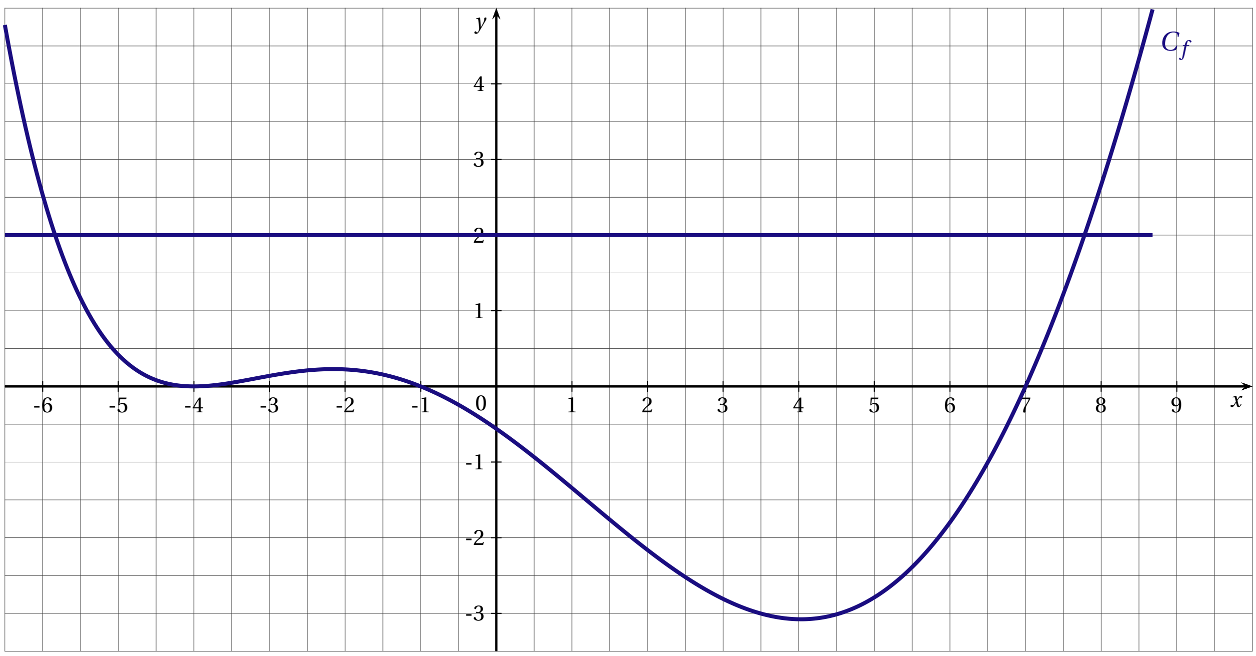
   i. L'image de -2 par la fonction f est 3 donc $f(-2) = 3$.

   ii. L'antécédent de $\sqrt{2}$ par la fonction g est -1 donc $g(-1) = \sqrt{2}$.

   (b) i. On sait que $f(-1) = 1$ donc l'image de -1 par la fonction f est 1.

   ii. On sait que $g(1) = -2$ donc l'antécédent de -2 par la fonction g est 1.

2. La courbe $\mathscr{C}_f$ tracée ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal, est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



   (a) La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en trois points donc les antécédents de o par la fonction f sont -4 ; -1 et 7 car $f(-4) = f(-2) f(7) = 0$.

   (b) On trace la droite d'équation $y = 2$.On obtient deux points d'intersection.
   Pour la première solution de $f(x) = 2$ on lit $-6 \leqslant x \leqslant -5,5$.
   Pour la seconde solution de $f(x) = 2$ on lit $7,5 \leqslant x \leqslant 8$.

   (c) Le tableau du signe de f suivant les valeurs de x set :

x	$-\infty$ -4 -1 7 $+\infty$
$f(x)$	$+$ 0 $+$ 0 -0 $+$

   (d) Le tableau des variations de la fonction f set :

x	$-\infty$	-4	-2	4	$+\infty$
			0.5		
$f(x)$	↘	0	↗ ↘	-3	↗

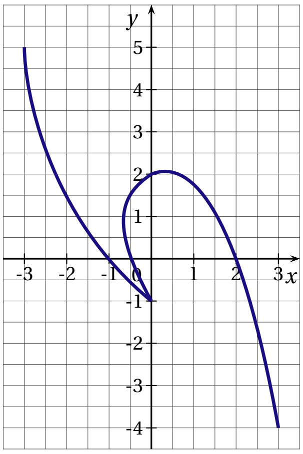
3. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-3;3]$. On sait que :
   - les images de -3 ; 0 et 3 par la fonction f sont respectivement 5 ; 0,5 et -4
   - 0 a exactement deux antécédents -1 et 2.

   (a) i. L'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions c'est vrai car 0 a exactement deux antécédents.

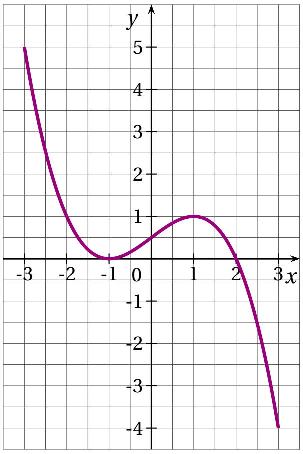
   ii. Le point $M(-1;0)$ appartient à la courbe représentative de la fonction f c'est vrai car $f(-1) = 0$.

   iii. La courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses en deux points. C'est vrai car 0 a exactement deux antécédents.

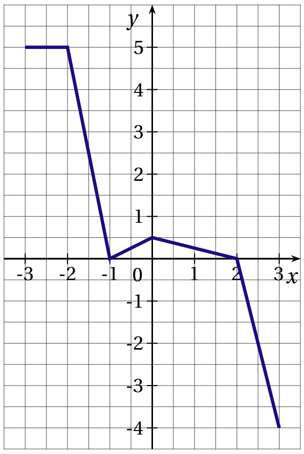
   (b) Pour les quatre courbes suivantes :



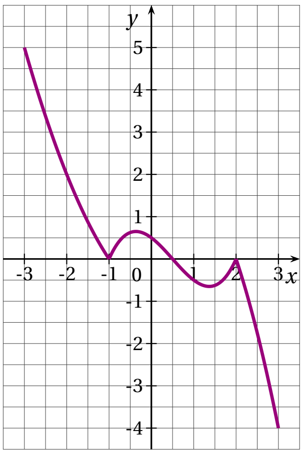
courbe $\mathscr{C}_1$



courbe $\mathscr{C}_2$



courbe $\mathscr{C}_3$



courbe $\mathscr{C}_4$

La courbe $\mathscr{C}_1$ ne peut pas convenir car par exemple 0 a deux images donc ce n'est pas une fonction.

Les courbes $\mathscr{C}_2$; $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ peuvent convenir.

4. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-10;10]$ telle que $f(-1)=2$. Son tableau de variations est le suivant :

x	-10		-5		1		3		5		10
$f(x)$	3	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

   (a) Le tableau du signe de f suivant les valeurs de x est :

x	-10 1 5 10
$f(x)$	$+0-0+$

   (b) Sur l'intervalle $[-1;0]$ la fonction f est décroissante donc comme $-1 \leqslant -\dfrac{2}{3}$ alors $f(-1) \geqslant f\left(-\dfrac{2}{3}\right)$

   (c) On sait que $f(-1)=2$.
   Sur $[-1;3]$ la fonction f décroit donc $f(x) \leqslant 2$.
   Sur $[3;10]$ la fonction f croit jusqu'à 1 donc ne dépasse pas 2.
   L'inéquation $f(x) \leqslant 2$ a donc pour solution $[-1;10]$.

5. Soit f définie sur l'intervalle $[-7;10]$ telle que $f(0)=2$.
   Le tableau de variations de la fonction f est le suivant :

x	-7		-3		2		3		5		10
$f(x)$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

   (a) Le tableau du signe de f suivant les valeurs de x est :

x	-7 2 5 10
$f(x)$	$+0-0+$

   (b) Sur $[-3;3]$ la fonction f est décroissante, comme $-\dfrac{5}{3} \leqslant -\dfrac{3}{5}$ alors $f\left(-\dfrac{5}{3}\right) \geqslant f\left(-\dfrac{3}{5}\right)$

   (c) On put comparer les images de -4 et de 8 car $2 \leqslant f(-4) \leqslant 5$ et $0 \leqslant f(8) \leqslant 1$. On aura donc $f(-4) > f(8)$

   (d) a et b sont deux réels de l'intervalle $[-3;3]$, tels que $a < b$. Sur $[-3;3]$ la fonction f est décroissante donc $f(a) > f(b)$.

   (e) Comme $f(0)=2$, l'inéquation $f(x) \geqslant 2$ admet comme solution $[-7;0]$.

6. **QCM**

Questions	**Réponses**
1. Si $f(2) = 3$ alors	☐ l'image de 3 est 2 ☐ l'antécédent de 2 est 3 ■ l'image de 2 est 3
2. Si f est croissante sur $\mathbb{R}$ alors	■ si $a < b$ on a $f(a) < f(b)$ ☐ si $a < b$ on a $f(a) > f(b)$ ☐ si $a < b$ on a $f(b) > f(a)$
3. L'ensemble de solution de l'inéquation $x^2 - 16 < 0$ est	☐ $]-\infty;-4] \cup [4;+\infty[$ ☐ $[-4;4]$ ■ $]-4,4[$
4. Le tableau de variations d'une fonction f	☐ n'est pas unique ■ est unique ☐ cela dépend
5. A un tableau de variations correspond	☐ une courbe unique ☐ aucune courbe ■ une infinité